

# 平板要素の使用に関するガイドライン

## Engineer's Studio Ver 6.0.0 以降

Engineer's Studio の平板の曲げ問題には2つの種類があります。初版から利用可能な6節点要素と8節点要素はセレンディピティ族です。セレンディピティ要素は、前川コンクリート構成則として知られている1980年代の前川教授の研究において使用されました。そのため、この要素がEngineer's Studio が採用されています。しかしながら、このセレンディピティ平板要素にはある弱点があります。この弱点を回避する目的で新しい3節点要素と4節点要素がVer 6.0.0に搭載されました。新しい要素にはSoh氏が提案する平板の曲げ変形モデルが含まれます。高次セレンディピティ要素は互換性維持のためにVer 6でも残されています。しかしながら、セレンディピティ要素よりもむしろ低次の3節点要素を推奨します。新しい低次要素は、前川コンクリート構成則の研究過程において使用された既往の実験結果との比較も実施され、よい結果が得られています。Ver6以降は、初版からある4節点セレンディピティ要素がSoh氏の4節点要素に置き換えられています。4節点セレンディピティ要素は、もはや製品に使用されていません。

全ての要素種類は、FEMでよく知られる共通の問題の影響を受けやすいです。さらにセレンディピティ要素は要素特有の若干の問題もあります。この文書ではEngineer's Studio 利用中に遭遇する問題について解説します。問題が起きた時にどのようにそれを発見するかやどのように対処するかについてヒントを提供します。

## 1 せん断ロッキング & 低減積分

セレンディピティ要素の主な問題はせん断ロッキング現象です。この解決方法は低減積分であり、何人かの著者らによって発表されました。Engineer's Studio には以下の積分スキームが実装されています。

要素	曲げ剛性 積分レベル	面外せん断剛性 積分レベル	質量 積分レベル
三角形3節点	2	2	2
三角形6節点	2	2	2
四角形4節点	3	3	2
四角形8節点	2	2	2

6節点要素と8節点要素は、曲げ剛性とせん断剛性の両方に対して積分レベルを3から2に低減されています。これは一様積分として知られています。

上述の6節点と8節点の積分スキームは、せん断ロッキングの主な問題を解決し、モーメントと変位に対しても信頼できる結果をもたらします。しかしながら、低減積分は新しい問題を生み出します。それは、ゼロ・エネルギーモードと呼ばれる現象や望ましくない面外せん断力です。これらについては、後半の事例の節においてさらに詳しく考察されています。

上述の3節点と4節点の積分スキームは、正確な積分結果が得られます。積分レベルが増加する分には結果が変わることはありません。これらの要素はせん断ロッキング現象は発生しません。

## 2 一般的なFEMモデル化 & 結果の確認

FEMでモデル化するときの一般的なアプローチは、最初にラフなメッシュ分割でモデルを作成し、計算して結果を得ます。その結果を詳細に観察することで問題に気が付きます。モデル作成者は問題が解決するまでメッシュ分割や形を変更します。このように繰り返し作業となります。

良い結果を得るために、メッシュ分割が細くなることがあります。このような状態は、要素サイズを意味する記号として $h$ を使い、一般に、‘ $h$ ’収束として知られています。(これに関連した用語に、速い収束を達成するために高次要素を使う必要があることを‘ $p$ ’収束があります。)FEM解析の基本的な概念は、 $h$ が小さくなるにつれて、近似値が微分方程式に内在する厳密解へと収束することです。解を収束させることは、FEM要素の基本的な要求事項です。Engineer’s Studioの平板要素は $h$ を減少させながら収束させる必要があります。しかしながら、 $h$ が小さくなると2次元要素なので自乗のオーダーに比例してモデルサイズが増大し、それ故に処理時間も長くなります。モデルを作成する際は正確さと迅速さとの間のバランスをユーザが考慮しなければなりません。

良い結果を得るためには、要素形状もまた重要です。一般に、6節点要素はできるだけ正三角形となるようにすべきです。4節点要素と8節点要素はできるだけ正方形となるようにすべきです。Engineer’s Studioが内部で使用している自動メッシュライブラリは、これを達成しようとします。しかしながら、その自動メッシュ機能は、幾何学的条件によっては理想的な要素形状とすることが難しい場合もあります。そのようなケースでは、ユーザは複雑な領域をより小さくて単純な領域へと分割し、それぞれに対して自動メッシュ機能を適用することを検討すべきです。このような管理統制がより良いメッシュ作成につながります。

一連の繰り返し作業の中でモデル化の問題を検出することは非常に重要であり、そのためのコンタ図やそれに関連するポスト処理の入力設定はまた非常に重要になります。コンタ図を観察するときは特に2つの点、すなわち、要素境界における段差のある結果と応力集中問題に留意すべきです。

### 2.1 要素境界における段差のある結果

Engineer’s Studioの平板要素式は、変位と回転に対する形状関数が要素境界において連続していますが、モーメントや面外せん断力では不連続となる場合があります。段差のある結果は、変位と回転のコンタ図では一切発生しませんが、曲げモーメントや面外せん断力のコンタ図では、たとえそれが良いモデルであっても発生します。

Engineer’s Studio Ver 5.0.0において、新しいポスト処理の機能が追加され、段差のある結果をみる設定も可能です。スムージングをせず、他のポスト処理をしない状態でコンタ図を用意できます。これはコンタ図のポスト処理“なし”と呼ばれるオプションで、ここでは“生”の結果と呼ぶことにします。各要素は他の要素とは独立してプロットされます。(詳細は文書「ContourPlots.pdf」を参照してください。)

生の結果の要素境界位置で大きな段差のある結果が観察される場合は、メッシュの質が悪い可能性があるため、メッシュの改善を検討すべきです。隣接する要素のモーメントの大きさと比較して要素境界で発生している段差の大小は、悪い結果を示す重要な兆候です。ユーザは結果が容認できるレベルまで入力を洗練すべきです。しかしながら、面外せん断力はメッシュを洗練することで解決すること

は難しく、しばしば段差のある結果が見えることがあります。これについては、事例の節で取り組みます。

## 2.2 応力集中

ここでは一般的な FEM 理論としての“応力集中”について述べます。平板要素の場合は応力とは  $N$ 、 $M$  そして  $S$  という断面力を指します。応力集中現象は、荷重が集中して載荷される鋭角な隅角部や支点付近で発生します。そのような場所では応力がとても大きくなり、無限大になる可能性があります。これは幾何学的な条件と微分方程式に内在する条件が組合わされた弾性モデルの特徴です。

$h$  収束によるメッシュ改善方法はモデル全体の結果を良好にします。 $h$  を小さくすることで微分方程式に内在する正確な解へと結果が収束します。しかしながら、もし幾何学的な条件と微分方程式に内在する条件に応力集中問題が含まれていれば、メッシュ細分化によって応力集中が顕著に現れます。これは要素が悪いということを示すわけではありません。すべての要素タイプは、この問題に影響されやすいです。当然のことながら、現実の構造に使われる材料は単純な弾性モデルとは異なる挙動をします。RC 構造や鋼構造は通常、非線形特性を持つので応力集中領域から離れた場所に応力が再分配されます。それ故に、設計者は応力集中問題に遭遇したら設計用途として現実的な値を得るために、ある程度広い領域で平均化することを考慮しなければなりません。

これを支援する機能として Engineer's Studio Ver5 では、コンタ図のポスト処理に新しいオプションがあり、それを使うと要素毎に平均化された断面力を表示できます。この処理はガウス点の値を平均して 1 要素で 1 個の値とするものです。設計用に使用する値としてはこの平均値を用いることが適切な場合があります。しかしながら、要素が細かすぎて平均値をとってもなお応力集中領域内であるケースもあり得ます。このような場合では、平均をとったとしても、設計用の値として直接使用するには大き過ぎる可能性があります。平均をとる領域の大きさを広げる必要がある場合もあります。このようなケースについてもコンタ図を考察した事例をこのガイドラインで説明しています。

Engineer's Studio はコンタ図用の最大最小の値を含むさまざまな数値を自動的に準備しています。応力集中問題が発生しているときのピーク値にもそれらが含まれていますので、好ましくない結果値が報告されます。そのような値を採用して設計用に使わないようにしてください。

## 3 事例

以下の節では Engineer's Studio の平板要素を使った際に生じる問題の事例を説明します。各事例には問題の簡単な要約、原因、発見方法、そして軽減する方法が書かれています。

### 3.1 ゼロエネルギーモード

**要約**：エネルギーを要素内で消費できずに要素が異常な形にゆがみます。

**原因**：6 節点要素と 8 節点要素では、低減積分によって剛性マトリクスがランク落ちします。これは要素がある特別なパターンでひずみエネルギーを必要とせずにゆがむことを意味します。3 節点要素と 4 節点要素を使うと、この問題に悩まされることはありません。

**発見**：変位図の検査、動的解析の場合は変位アニメーションを検査することで要素の形がゼロエネルギーモードを呈することを発見できます。要素の面内、面外の振動でも発生することがあり

ます。動的解析の場合は、それらは繰り返し荷重による振動によって各要素の揺れ方が全体的に揺れないことで認識されます。すべてのケースは、このような挙動は発生すれば容易に見えます。

**コメント**：図1は、8節点要素の静的解析で発生した様子ですが、このような単純なモデルは通常作成されません。図1のような問題はメッシュ分割を $2 \times 2$ にすることで簡単に解決されます。

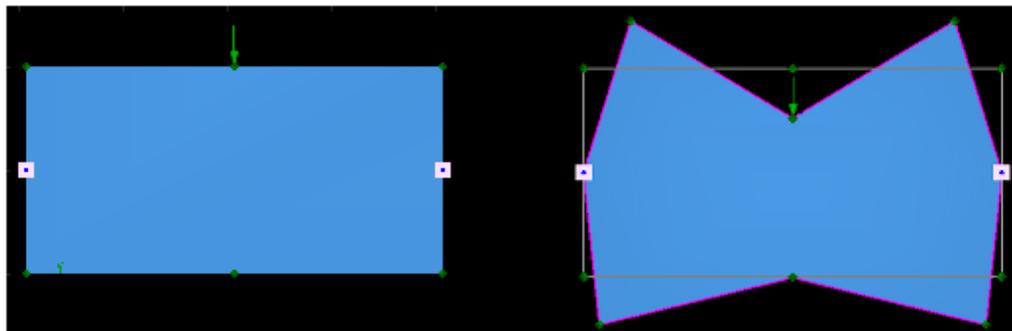


図1: 静的解析でのゼロエネルギーモード

実際のモデルでこのような挙動は、動的解析において図2に示されるような場合に観察されます。このケースは、8節点要素が使用され、減衰定数ゼロの場合であり、モデル全体の解析において面外の振動で極端なゼロエネルギーモードが無意味に発生しています。

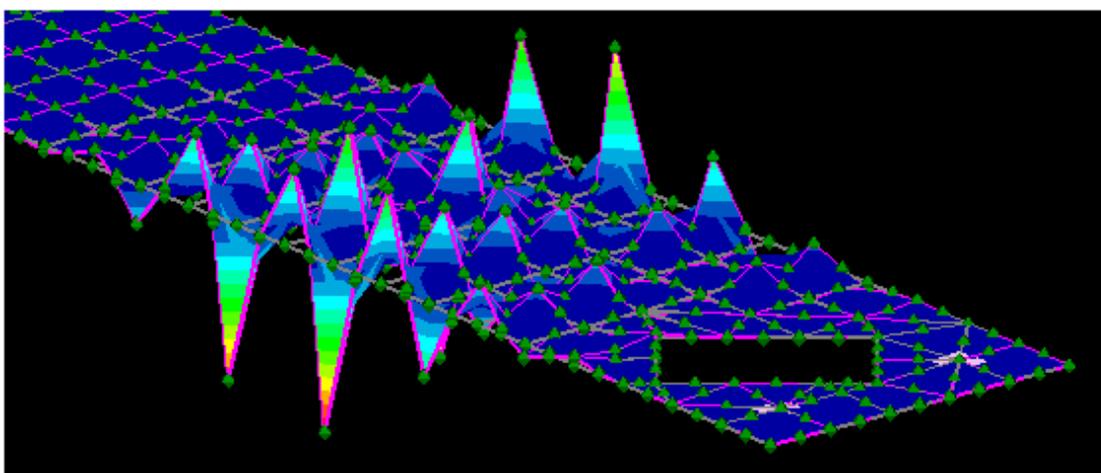


図2: 動的解析でのゼロエネルギーモード

**改善**：図2に示される動的問題は以下のように解決されます。大きな菱形領域はまず大きな長方形領域と小さな三角形領域に分割し、領域をさらに細かいメッシュにします。また、このモデルでは減衰が設定されていません。メッシュ分割とは別の解決方法として、減衰を与えることも有効です。減衰作用が全くない現実の構造は極めて少ないでしょう。

### 3.2 応力集中

**要約**：周辺の領域に比べてとても大きな応力 (N, M, S) が極めて狭い領域に発生します。

**原因**：前述したようにこの問題はメッシュ要素を小さく分割することで低減でき、結果は幾何学的条件と微分方程式に内在する解へと収束します。

**発見**：グループ毎のコンタ図と数値表に表示される最大最小の値を観察して検出します。コンタ図の凡例に示される最大最小値にも注意して観察します。図3は、応力集中が面外せん断力で発生している様子です。このモデルは正方形の版で左端と右端で単純支持されており、面外に等分布荷重が载荷されています。図4は同じモデルと結果ですが、ポスト処理オプションとして平均が指定されています。図3のコンタ図凡例とは異なっており、それは図3では隅角部におけるピーク値が全体に広がる色分布をゆがめているためです。図3ではピーク値が10.4kN/mであり、図4ではピーク値は2.67kN/mです。この場合、ユーザはコンタ図凡例を定義しなおすことで色分布のゆがみを取り除くことができます。ただし、このモデルは通常よりもメッシュが細かすぎていることに注意が必要です。そのために応力集中現象が発生しました。

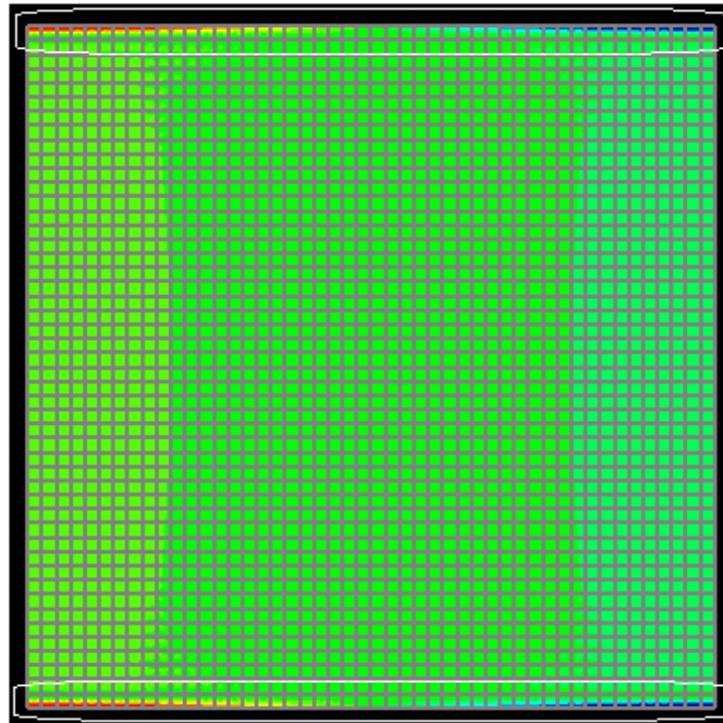


図3: 単純支持板の応力集中現象 (スムージング有り)

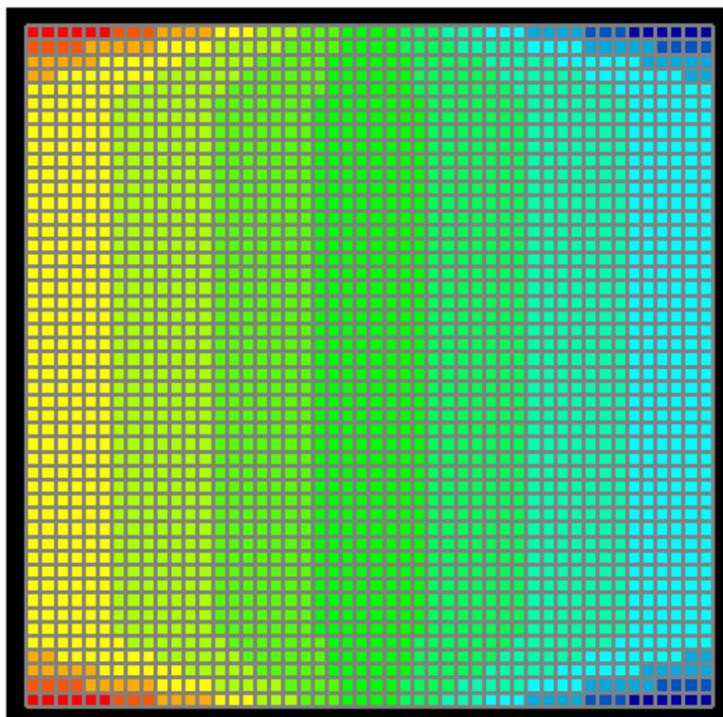


図 4: 単純支持板の応力集中現象 (スムージング無し、要素で平均化)

**改善** : 応力集中問題が発生する領域では過度に小さな要素を作成しないことです。設計用の値として用いる場合はある領域内で平均した値を採用すべきです。ポスト処理のオプションで“平均”を使用することで対応できますが、もし問題が発生している領域と比べて要素がとても小さい場合は、要素の大きさよりも広い領域に対して平均をとる必要があるかもしれません。RC 構造に対する材料非線形解析モデルにおいてもこのことを考慮する必要があります。

### 3.3 要素内で面外せん断力が振動する問題

**要約**：要素内の面外せん断力が隣接する要素の傾向と比較して過度に勾配を持つ場合があります。この現象は、6 節点要素や 8 節点要素で観察されます。

**原因**：この原因としては低減積分の可能性が考えられます。8 節点要素は  $2 \times 2$  のガウス点が定義されており、要素内の値が歪められてしまうようです。

**発見**：面外せん断力の生値を検査して要素境界で大きな段差を探します。また、生値の領域内に切断面を定義します。これにより全体的な傾向をつかむことができますが、個別の要素の結果は不十分です。

**コメント**：図 5 と図 6 は、8 節点要素を用いた同じモデルの結果です。図 5 は生値の結果ですが、要素内で帯状がみえます。結果の数値はとても歪んでいます。図 6 はポスト処理オプションで平均を選択したときの結果です。こちらの方が許容可能な数値になっています。このモデルでは変位と曲げモーメントについては高精度な結果になっていることに注意が必要です。また、このモデルでは隅角部において応力集中現象が発生していることにも留意してください。応力集中が帯状結果の要因になっている可能性があります。平均の結果である図 6 では応力集中の傾向を明確に掴むことができます。同様なことが図 3 と図 4 においてみることができ、そこでは応力集中と帯状問題が組み合わさって色凡例の分布を歪めています。図 6 の平均の結果はベターな結果であり、問題を解決します。

**改善**：これまでの検討では、ポスト処理オプションで平均を適用することで、面外せん断力の結果を許容可能なレベルにします。

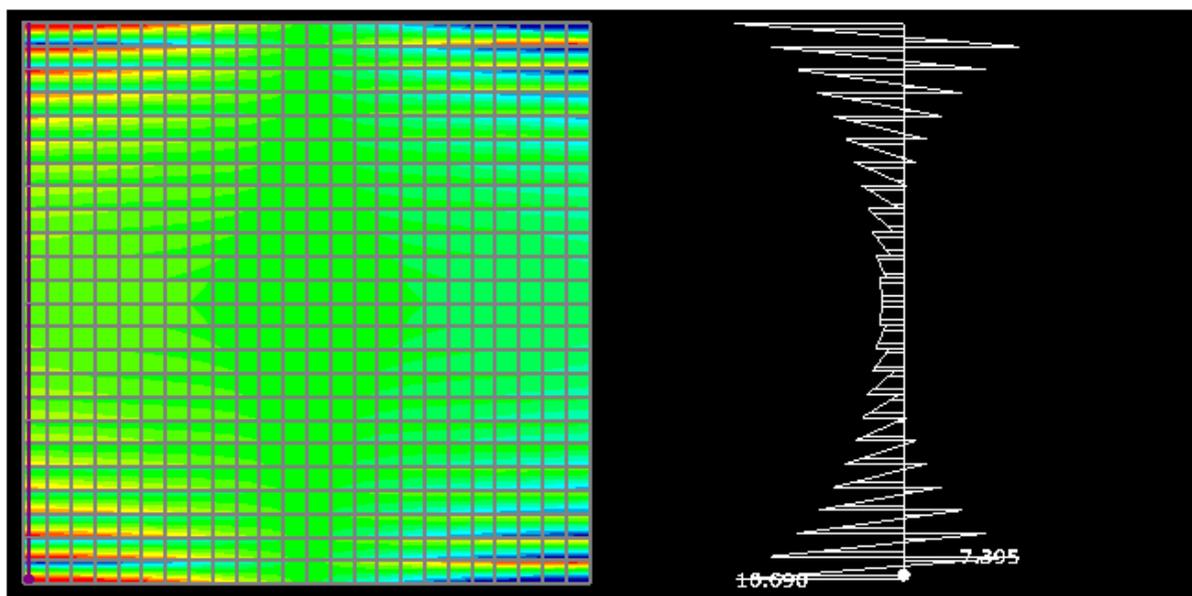


図 5: 要素内部で振動する面外せん断力 (生値)

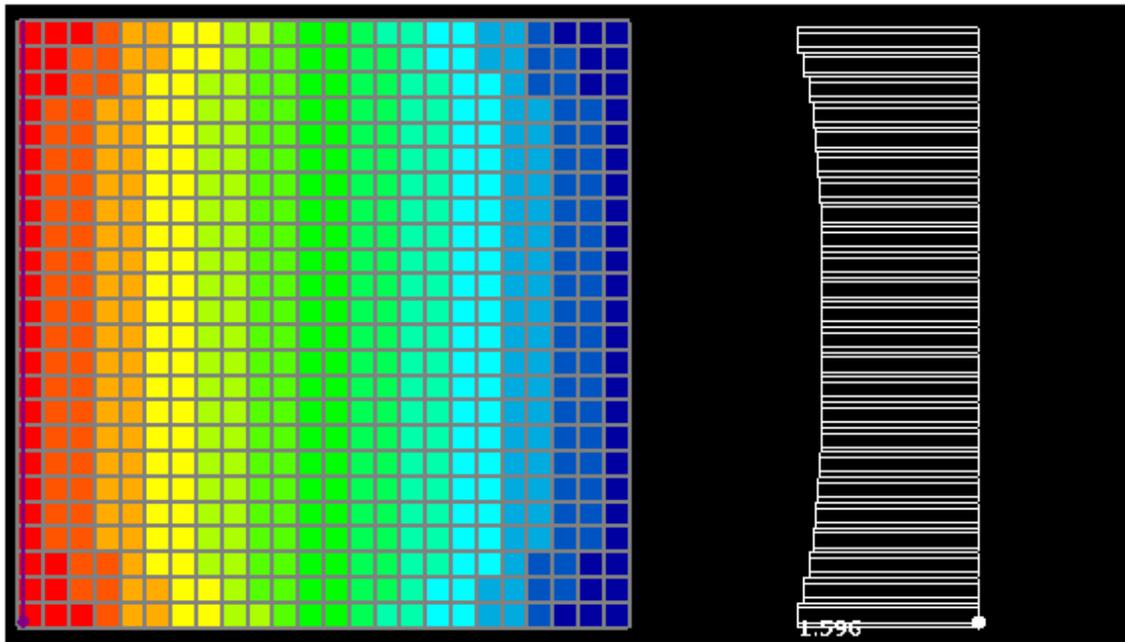


図 6: 要素内部で振動する面外せん断力 (平均値)

## 目次

1	静的解析でのゼロエネルギーモード . . . . .	4
2	動的解析でのゼロエネルギーモード . . . . .	4
3	単純支持板の応力集中現象 (スムージング有り) . . . . .	5
4	単純支持板の応力集中現象 (スムージング無し、要素で平均化) . . . . .	6
5	要素内部で振動する面外せん断力 (生値) . . . . .	7
6	要素内部で振動する面外せん断力 (平均値) . . . . .	8